ROCZNIKI FILOZOFICZNE
Tom XXIX, zeszyt 1 — 1981

LUDWIK BORKOWSKI

KILKA UWAG O ZASADZIE DWUWARTOŚCIOWOŚCI I LOGIKACH WIELOWARTOŚCIOWYCH

Nieraz można spotkać się z poglądem, że klasyczny rachunek zdań jest oparty jedynie na zasadzie dwuwartościowości i że wprowadzając funktory rachunku zdań różne od funktorów w nim występujących trzeba odrzucić zasadę dwuwartościowości przyjmując, że oprócz prawdy i fałszu istnieją inne wartości logiczne.

I tak np. pisze się, że „Łukasiewicz pierwszy też wykazał, że dla ugruntowania logiki modalnej, a więc logiki, której specyficznymi i podstawowymi terminami są zwroty „konieczne jest, że ...” i „możliwe jest, że ... nieodzowne jest założenie, że prócz fałszu i prawdy istnieją inne wartości logiczne” [1].

Zadaniem tego artykułu jest krytyczne rozpatrzenie tego stanowiska i ustalenie, czy i w jakim sensie jest ono słuszne.

Wątpliwości co do słuszności przedstawionego poglądu mogą się zrodzić, jeśli zwrócimy uwagę na następujące znane fakty. Na gruncie pewnych wielowartościowych systemów rachunku zdań można wprowadzić definicje funktorów klasycznych. Wtedy klasyczny rachunek zdań jest częścią danego wielowartościowego rachunku zdań wzbogaconego o odpowiednie definicje. Dotyczy to nie tylko rachunków wielowartościowych funkcjonalnie (definicyjnie) pełnych (tj. takich, w których można zdefiniować wszystkie funktory danej logiki wielowartościowej), lecz również rachunków funkcjonalnie niepełnych, np. wielowartościowych implikacyjno-negacyjnych rachunków zdań Łukasiewicza. Modalny system ścisłej implikacji Lewisa, w ujęciu jego autora, zawiera jako część właściwą klasyczny rachunek zdań. W późniejszych ujęciach tego systemu i innych współczesnych systemów modalnych nadbudowuje się rachunek modalny nad klasycznym rachunkiem zdań, a więc przyjmuje się cały klasyczny rachunek zdań i dołącza do niego dodatkowe aksjomaty, w których występują terminy modalne. W analogiczny sposób buduje

[1] J. Słupecki. *Jan Łukasiewicz*. „Wiadomości Matematyczne” 15 : 1972 seria II s. 73 - 78 (cytat ze s. 78).

się też np. systemy temporalnych rachunków zdań i inne systemy rachunków zdań zawierające oprócz funktorów klasycznych również inne funktory.

Otóż jeśli uważa się, że klasyczny rachunek zdań oparty jest jedynie na zasadzie dwuwartościowości i że dla wprowadzenia innych funktorów, np. modalnych, trzeba tę zasadę odrzucić, to staje się niezrozumiałym, dlaczego można wprowadzać funktory nieklasyczne, np. modalne, w systemach, które zachowują cały klasyczny dwuwartościowy rachunek zdań.

Proste rozwiązanie tej pozornej trudności uzyskujemy, gdy uświadomimy sobie, że klasyczny rachunek zdań oparty jest na dwóch założeniach, mianowicie na zasadzie dwuwartościowości i na założeniu, że wszystkie funktory w nim występujące są funktorami prawdziwościowymi scharakteryzowanymi przez tabelki dwuwartościowe, w których wartości są interpretowane semantycznie jako prawdziwość i fałszywość. Przyjmując oba te założenia łącznie nie możemy wprowadzić w takim rachunku zdań innych funktorów, różnych od klasycznych.

Wykraczając poza klasyczny rachunek zdań, wprowadzając inne, nieklasyczne funktory, można odrzucić bądź zasadę dwuwartościowości, bądź założenie, że wszystkie funktory uzyskanego w ten sposób rachunku zdań są scharakteryzowane przez tabelki dwuwartościowe.

Łukasiewicz budując metodą matrycową trójwartościowy rachunek zdań przyjmował, że oprócz prawdy i fałszu istnieje trzecia wartość logiczna, deklarując to swoje stanowisko jako odrzucenie zasady dwuwartościowości, oraz uogólnił pojęcie funktora prawdziwościowego na funktory scharakteryzowane przez tabelki trójwartościowe, w których wartości logiczne są interpretowane semantycznie. Budując jednak następnie ogólniej metodą matrycową systemy rachunku zdań skończenie i nieskończenie wielowartościowe nie interpretował już semantycznie wartości logicznych wprowadzanych w tych systemach.

Lewis budując modalny system ścisłej implikacji metodą aksjomatyczną zachowywał zasadę dwuwartościowości, ale oprócz funktorów klasycznych wprowadzał funktory modalne, które nie dają się scharakteryzować za pomocą dwuwartościowych tabelek matrycowych, wprowadzał więc funktory, które w tym sensie nie są prawdziwościowe. Podobnie postępowali i postępują inni logicy, którzy nad klasycznym rachunkiem zdań nadbudowują różne rachunki zdań, np. modalne, temporalne. Rozszerzają oni klasyczny rachunek zdań wprowadzając funktory nie będące funktorami prawdziwościowymi scharakteryzowanymi za pomocą tabelek dwuwartościowych.

Dla lepszego zrozumienia postawionego problemu i znalezienia właściwej odpowiedzi wystarczy uświadomić sobie, na czym polega we

współczesnym ujęciu matrycowa charakterystyka jakiegoś systemu rachunku zdań. Pomocnym może się też okazać dokładniejsze przeanalizowanie toku myśli Łukasiewicza, który doprowadził go do zbudowania trójwartościowego systemu rachunku zdań.

Ogólnikowo można powiedzieć, że matrycowa charakterystyka systemu rachunku zdań jest pewną charakterystyką algebraiczną tego systemu.

Algebrą jest układ uporządkowany złożony z danego zbioru elementów oraz z funkcji określonych na tym zbiorze, których wartości również należą do tego zbioru. Wśród tych elementów wyodrębniamy pewne elementy, które nazywa się wyróżnionymi. Matrycę otrzymujemy z algebry uwzględniając ponadto zbiór elementów wyróżnionych. Elementy danego zbioru nazywa się wartościami matrycy, a elementy wyróżnione — wartościami wyróżnionymi. Matrycę nazywa się n-wartościową, gdy zbiór jej elementów jest n-elementowy. Dokonując charakterystyki matrycowej danego systemu rachunku zdań przyporządkowujemy funktorom w nim występującym określone funkcje matrycy, scharakteryzowane zwykle za pomocą tzw. tabelek matrycowych (a niekiedy za pomocą pewnych wzorów). Jeśli zmiennym zdaniowym danego wyrażenia przyporządkujemy określone wartości matrycy, to — z uwagi na przyporządkowanie funktorom w nim występującym określonych funkcji matrycy — wyrażeniu temu jest przyporządkowana określona wartość matrycy. Tautologią danej matrycy jest wyrażenie, któremu przy każdym przyporządkowaniu jego zmiennym zdaniowym wartości matrycy jest przyporządkowana wartość wyróżniona. Matryca jest adekwatna dla danego systemu, gdy zbiór tez tego systemu jest identyczny ze zbiorem tautologii tej matrycy. System jest n-wartościowy, gdy liczba n jest najmniejszą taką liczbą, że istnieje matryca n-wartościowa adekwatna dla tego systemu.

Należy zaznaczyć, że zgodnie z przedstawionym ujęciem charakterystyka matrycowa systemu jest taką jego charakterystyką algebraiczną, przy której wartości matrycy nie muszą być interpretowane semantycznie. Należy tu jednak usunąć pewne nieporozumienia związane z tym faktem, że pewni autorzy określają pojęcia spełniania wyrażeń w matrycy i tautologii matrycy jako semantyczne. Idziemy tu za określeniem terminu „semantyczny" podanym przez Tarskiego i — jak sądzę — dość powszechnie w logice przyjętym. W myśl tego określenia terminy semantyczne dotyczące wyrażeń danego języka są definiowalne tylko w takim metajęzyku, który oprócz nazw wyrażeń tego języka zawiera również ich przekłady na metajęzyk, a więc w metajęzyku wykraczającym poza syntaksę danego języka. Pojęcia spełniania w matrycy wyrażeń danego rachunku zdań oraz tautologii matrycy mogą być określone w me-

tasystemie, w którym występują tylko nazwy wyrażeń tego rachunku, a nie występują ich przekłady na metajęzyk. W metajęzyku tym nie muszą występować zmienne zdaniowe i przekłady wyrażeń języka zbudowanych z nich, gdyż rachunek zdań, który jest zakładany w metajęzyku, może być budowany metalogicznie, bez wprowadzenia zmiennych zdaniowych. Jest to zgodne z tym faktem historycznym, że pojęcia matrycy, spełniania wyrażeń w matrycy i tautologii matrycy zostały zdefiniowane wcześniej od wprowadzenia pojęć semantycznych w logice współczesnej.

W przypadku matrycy dwuwartościowej łatwo może dojść do pomieszania, gdyż nie tylko używa się równobrzmiących terminów (mówiąc np. o spełnianiu wyrażenia w matrycy i w modelu), ale również warunki matrycowego spełniania wyrażeń tworzonych za pomocą funktorów klasycznych pokrywają się w swoim brzmieniu z częścią indukcyjnej definicji spełniania w modelu wyrażeń tworzonych za pomocą takich funktorów, a więc mogą być interpretowane semantycznie.

Z przytoczonych tu powodów uważam więc za słuszne stanowisko, w myśl którego pojęcia matrycy, spełniania wyrażeń w matrycy i tautologii matrycy są pojęciami syntaktycznymi [2].

Dlatego też możemy mówić, że wartości matrycy mogą być wprowadzane bez dodatkowej interpretacji semantycznej, co jest zgodne ze znanymi faktami z historii logiki, gdyż — jak już o tym wspominaliśmy — w ten sposób były one na przykład wprowadzane przez Łukasiewicza w jego wielowartościowych rachunkach zdań.

Budując więc jakąś metodą (matrycową, aksjomatyczną, założeniową lub jeszcze inną) system rachunku zdań, którego adekwatna matryca o najmniejszej ilości elementów jest więcej niż dwuwartościowa, można tę charakterystykę matrycową traktować czysto formalnie, nie przyjmując żadnej semantycznej interpretacji dla wartości tej matrycy. Budowanie takiego systemu nie musi być więc związane z odrzucaniem zasady dwuwartościowości, z przyjęciem, że podział zdań na prawdziwe i fałszywe nie jest zupełny.

Stosując dany rachunek zdań przyporządkowujemy jego zmiennym zdaniowym pewną klasę zdań (które podstawia się za te zmienne). Otóż należy zauważyć, że opisana powyżej charakterystyka matrycowa systemu nie musi być związana z jakimś przyporządkowaniem wartościom matrycy określonych podklas klasy zdań, do których stosujemy dany rachunek (określonych własności tych zdań). A więc wartości matrycy

[2] Stanowisko takie podzielają np.: C. G. Chang, H. J. Keisler. *Model Theory*. Amsterdam 1973 (którzy np. pojęcie tautologii zaliczają do pojęć syntaktycznych — zob. s. 16).

nie muszą mieć żadnej interpretacji, w szczególności nie muszą mieć żadnej interpretacji semantycznej.

Można niekiedy ustalić takie przyporządkowanie, taką interpretację, przy której wartościom matrycy można przyporządkować semantyczne własności zdań. Przy charakterystyce klasycznego rachunku zdań elementy 1 i 0 algebry dwuelementowej mogą być interpretowane jako semantyczne własności prawdziwości i fałszywości. Budując system trójwartościowego rachunku zdań Łukasiewicz interpretował wartości swej trójwartościowej matrycy semantycznie, biorąc pod uwagę — jak na to wskażemy poniżej — inny, trójczłonowy semantyczny podział zdań o przyszłych zdarzeniach. Jednakże jego ogólna charakterystyka logik wielowartościowych jest już czysto formalna, nie związana z żadną interpretacją wartości matrycy.

Zdanie stwierdzające, że funktory danego systemu rachunku zdań nie dają się scharakteryzować za pomocą tabelek dwuwartościowych, interpretujemy jako zdanie stwierdzające, że adekwatna matryca tego systemu nie jest dwuwartościowa.

Z przeprowadzonych rozważań wynika tylko, że budując system rachunku zdań zawierający funktory różne od klasycznych, np. funktory modalne, budujemy system rachunku zdań, dla którego nie istnieje adekwatna matryca dwuwartościowa. Jednakże wartości ewentualnej adekwatnej matrycy więcej niż dwuwartościowej tego systemu nie muszą być interpretowane semantycznie. Budowa takiego systemu nie jest więc związana z założeniem, że oprócz prawdy i fałszu istnieją inne wartości logiczne, jeśli termin „wartość logiczna" jest rozumiany jako termin semantyczny, tak jak terminy „prawda", „fałsz".

Powyższe uwagi podają rozwiązanie problemu postawionego na początku tego artykułu. Uzupełnimy je jednak jeszcze rozważając, na czym polegało faktycznie postępowanie Łukasiewicza przy budowie trójwartościowego rachunku zdań. Nie dość uważnie odczytuje się teksty, w których wyraża on swe intuicje związane z budową tego systemu [3]. Rozpatrując zdania o przyszłych zdarzeniach mówi on o zdaniach prawdziwych d z i s i a j, fałszywych d z i s i a j, oraz o takich, które d z i ś nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Zdanie „Od dziś za rok będę w Warszawie" jest d z i ś prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy dziś istnieją fakty, które spowodują zaistnienie stanu rzeczy opisywanego przez to zdanie. Jest ono d z i ś fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy dziś istnieją fakty wykluczające zaistnienie opisywanego stanu rzeczy.

---

[3] Tok myśli Łukasiewicza, który doprowadził go do zbudowania logiki trójwartościowej, przedstawiony jest w dwóch jego artykułach: *O determinizmie* i *Filozoficzne uwagi o wielowartościowych systemach rachunku zdań*. Zob. J. Ł u k a s i e w i c z. *Z zagadnień logiki i filozofii*. Warszawa 1961 s. 114 - 126, 144 - 163.

Ma trzecią wartość logiczną, gdy dziś nie istnieją ani fakty pierwszego rodzaju, ani fakty drugiego rodzaju.

Wiadomo, że klasyczna koncepcja prawdy, sformułowana współcześnie w metalogice, nie dopuszcza możliwości uzupełniania terminów „prawdziwy", „fałszywy" określeniami czasowymi. A więc wydaje się, że Łukasiewicz nie wykazał, że oprócz prawdy i fałszu (w sensie klasycznym) istnieje trzecia wartość logiczna. Lecz, że faktycznie oprócz czy obok podziału zdań na prawdziwe i fałszywe wprowadził podział zdań o przyszłych zdarzeniach na zdania dziś prawdziwe, dziś fałszywe i zdania o trzeciej wartości logicznej, które dziś nie są ani prawdziwe, ani fałszywe. Nie zwracając dostatecznej uwagi na różnicę między wyrażeniami „prawdziwy" i „dziś prawdziwy" i analogicznie między wyrażeniami „fałszywy" i „dziś fałszywy", ujął on swoje stanowisko jako odrzucenie zasady dwuwartościowości, jako odrzucenie zupełności podziału zdań na prawdziwe i fałszywe, choć było to faktycznie wprowadzenie innego podziału zdań. W myśl klasycznej koncepcji prawdy zdanie „Od dziś za rok będę w Warszawie" jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy od dziś za rok będę w Warszawie. Jest ono fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy od dziś za rok nie będę w Warszawie. Całkiem inne są podane przez Łukasiewicza warunki konieczne i wystarczające na to, by zdanie to było d z i ś prawdziwe lub d z i ś fałszywe. Zdania, które w myśl ustalenia Łukasiewicza mają trzecią wartość logiczną, są także prawdziwe lub fałszywe (w sensie klasycznym), choć nie są ani d z i ś prawdziwe, ani d z i ś fałszywe. A więc mamy tu do czynienia z innym pojęciem prawdziwości i fałszywości, z innym podziałem zdań. Przyjęcie tego trójczłonowego podziału zdań nie jest związane z jakimś odrzuceniem klasycznego podziału zdań na prawdziwe i fałszywe, choć pewna semantyczna interpretacja trójwartościowej matrycy Łukasiewicza jest związana z tym trójczłonowym podziałem.